Opciones bajo la distribución normal

Jesús Besada Juez | Gustavo Plaza González | (info@qwi.es)
07 de Julio de 2015

Abstract

En este artículo se analizan las opciones de estilo europeo bajo la única suposición de que los precios del subyacente siguen una distribución normal. Muchos traders (entre los que se incluyen los autores) piensan que una distribución normal, en vez de la ampliamente aceptada lognormal, en muchas casos describe adecuadamente el comportamiento del mercado.

Independientemente de que se esté de acuerdo con la afirmación anterior, salvo en ciertas condiciones (tiempos muy largos hasta vencimiento y/o volatilidades muy altas), los resultados son muy similares con los obtenidos por las fórmulas de Black Scholes (BS en adelante).

Las formulas bajo la distribución normal son sensiblemente más sencillas e interpretables que las obtenidas por BS, por lo que tienen un valor pedagógico muy alto, obteniéndose resultados muy importantes que son igualmente válidos usando la formulación BS.

Key words: Opciones, Black Sholes, Distribución normal, Distribución lognormal, volatilidad implicada.

1. Formulación

Para el cálculo del precio de una opción, se va a realizar únicamente una suposición, que la distribución de precios del subyacente hasta el vencimiento sigue una distribución normal. No se va a realizar la suposición de que el subyacente siga una distribución lognormal ni que se encuentre gobernado por una constante de dirección (*drift rate*). Esto supone hacer cero el término r (típicamente el '*risk free interest rate*') en BS.

Independientemente de que sea más o menos cuestionable si el subyacente se encuentra gobernado por un *drift rate*, no cabe ninguna duda que el enfoque anterior es **completamente neutro** y no introduce ningún tipo de sesgo en el comportamiento del subyacente. Como se verá más adelante, añadir el término r resulta trivial para aquellos interesados en tenerlo en cuenta.

Una de los aspectos más discutibles del modelo BS es el sobreprecio que introduce en los Calls, esto se explica tanto por el uso de la distribución lognormal como por la introducción del término r. La formulación aquí obtenida no introduce este sesgo y es uno de los puntos a favor a considerar.

Se usará el argumento de no arbitraje para derivar la fórmula del precio. Esto se traduce al ser una opción de tipo europeo en que la esperanza matemática debe ser cero al vencimiento.

El resultado que se obtiene es el siguiente (ver el apéndice para la deducción matemática):

$$\boxed{C = \sigma \cdot \phi(x) + (S - K) \cdot \Phi(x)} \qquad (1)$$

Dónde:

$$\sigma \text{ desviación típica de la distribucción normal asociada}$$

$$\phi(x) \text{ valor de la distribucción normal estándar}$$

$$S \; valor \; del \; subyacente$$

$$K \; Strike \; Price \; seleccionado$$

$$\Phi(x) \; valor \; de \; la \; distribucción \; normal \; acumulada \; estandar$$

$$x = \frac{S-K}{\sigma}$$

Hay que hacer notar, que σ es la desviación típica de la distribución normal asociada del subyacente, y no se encuentra anualizada como suelen representar los traders a la volatilidad V. Por lo que:

$$\boxed{\sigma = V \cdot \sqrt{T}} \qquad (2)$$

Siendo T el tiempo hasta el vencimiento expresado en años. En el caso de que V esté en porcentaje, además hay que multiplicar por S.

De forma similar, se obtiene que el valor de un Put es:

$$\boxed{P = \sigma \cdot \phi(x) + (K-S) \cdot \Phi(-x)} \qquad (3)$$

Tal y como se indicaba anteriormente, si se desea incluir el término r, se obtiene la siguiente fórmula:

$$C = e^{r \cdot T} \cdot \big(\sigma \cdot \phi(x) + (S-K) \cdot \Phi(x)\big)$$

2. Análisis de los resultados

Para las conclusiones que siguen, se parte de la fórmula obtenida del valor de un Call en (1).

Put-Call parity

Se comprueba de forma sencilla que si se resta el valor de un Call y de un Put se obtiene la conocida expresión 'Put-Call parity':

$$\boxed{C - P = S - K} \qquad (4)$$

Se deriva que la relación de paridad entre un Call y un Put se mantiene bajo la distribución normal.

Valor at the money

Si se calcula el valor de un Call 'at the money' (K=S), se obtiene:

$$\boxed{C_{K=S} = \frac{\sigma}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \approx 0.4 \cdot \sigma} \qquad (5)$$

Este resultado puede sorprender a primera vista, ya que concluye que el valor de un Call o de un Put 'at the money' **depende únicamente de la desviación típica**, o lo que es lo mismo, de la volatilidad según la ecuación (2).

A mayor volatilidad, más caro resultará la opción y viceversa:

> Calcular el valor de un Call at the money con los siguientes datos:
>
> - Valor del subyacente=100.
> - 30 días hasta vencimiento.
> - Volatilidad anual=10%.
>
> Usando la aproximación en (5):
>
> $$\sigma = 0.1 \cdot 100 \cdot \sqrt{\frac{30}{365}} = 2.87, C \approx 0.4 \cdot 2.87 = 1.148$$
>
> El valor obtenido bajo el modelo completo de BS es de 1.144, lo que da una idea de la alta precisión que se obtiene.

Greeks

Se obtienen a continuación las conocidas 'Greeks' de una opción:

$$Delta: \Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(x)$$

$$Gamma: \Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\phi(x)}{V \cdot \sqrt{T}}$$

$$Vega: \nu = \frac{\partial C}{\partial V} = \phi(x) \cdot \sqrt{T}$$

$$Theta: \Theta = \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{V \cdot \phi(x)}{2 \cdot \sqrt{T}}$$

Se extraen conclusiones inmediatas a tenor de las formulas anteriores:

- Gamma, Vega y Theta dependen directamente de la distribución normal estándar. Por lo tanto serán máximas en K=S.
- Gamma es mayor cuando hay menor volatilidad y menor tiempo hasta vencimiento.
- Vega es mayor cuando más tiempo hasta vencimiento queda.
- Theta depende de la volatilidad y aumenta más rápidamente cuanto menos tiempo queda hasta vencimiento.

Ratios

Utilizando las greeks anteriores, es posible calcular los ratios entre ellas para analizar las condiciones más favorables para una estrategia en concreto. Por ejemplo, si se usa una estrategia que depende de la dirección (incluso una estrategia direccional y neutra pero que requiere movimiento como un '*strangle*'), Gamma es nuestro amigo y Theta nuestro enemigo, por lo que hay que maximizar el siguiente ratio:

$$\frac{\Gamma}{\Theta} = \frac{2}{V^2}$$

Se observa que sólo depende de la volatilidad, por lo que cualquier estrategia de este tipo debería montarse cuando la volatilidad sea lo más baja posible. Ni siquiera el paso del tiempo altera el ratio, lo que significa que lo que aumenta Gamma, decrece Theta al mismo ritmo y viceversa.

Si lo que se quiere es comprar volatilidad esperando que suba, Vega es nuestro amigo y Theta nuestro enemigo. En este caso hay que maximizar el siguiente ratio:

$$\frac{\nu}{\Theta} = \frac{2 \cdot T}{V}$$

Nuevamente, cuanto más baja sea la volatilidad mejor será el ratio. Sin embargo, esta vez, el ratio irá empeorando a medida que queden menos días para el vencimiento. Por lo tanto, se debe montar esta estrategia con volatilidades bajas y un tiempo suficiente hasta vencimiento.

Para analizar la exposición a Gamma y Vega:

$$\frac{\Gamma}{\nu} = \frac{1}{V \cdot T}$$

Razonamientos similares se pueden hacer para las ventas, buscando el mínimo del ratio en vez del máximo.

Delta de una opción

Retomando la expresión obtenida para Delta:

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial S} = \Delta = \Phi(x)} \qquad (6)$$

Este resultado es muy ilustrativo, ya que bajo el supuesto de distribución normal, el delta de un Call representa también exactamente la probabilidad de que el subyacente sea mayor que K al vencimiento. Tanto es así, que se puede reescribir la ecuación (1) como:

$$C = \sigma \cdot \phi(x) + \Delta \cdot (S - K)$$

Esta nueva expresión ilustra de forma clara que el precio de la opción se encuentra gobernado por dos factores.

Factores que gobiernan el precio de una opción

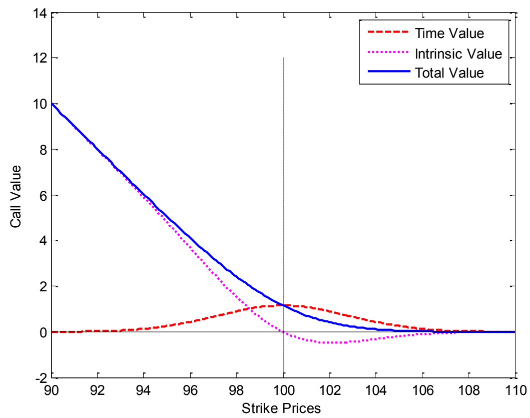
El primer término representa el valor de la opción por las posibilidades que tiene de ser valioso a vencimiento, gobernado directamente por la volatilidad y siendo máximo en valores 'at the money', lo que representa un concepto similar al conocido como 'Time Value'.

El segundo término representa un concepto similar al valor intrínseco de la opción, que como se concluye, para opciones muy 'in the money', es decir valores con deltas próximos a 1 se obtiene:

$$C_{\Delta \approx 1} \approx (S - K)$$

El segundo factor se vuelve negativo para valores ‘out the money’ a diferencia de la definición clásica de valor intrínseco. Hay que tener en cuenta que este factor penaliza a los valores ‘out the money’ ya que la probabilidad de que la opción termine sin valor aumenta.

La siguiente figura muestra la composición de ambos factores que resultan en el valor del Call a diferentes Strike Prices para S=100:



Puntos de interés

Se puede observar de la gráfica anterior, que existen varios puntos interesantes a conocer.

El primero de ellos ocurre cuando se cruzan ambas curvas, aproximadamente a un delta de 0.7, el coste de ambos factores es el mismo, es decir, la opción cuesta lo mismo por su ‘Time Value’ que por su ‘Valor Intrínseco’. Para valores mayores de delta, el factor que predomina es el intrínseco y la opción cada vez se asemeja más a su subyacente.

El segundo punto interesante ocurre exactamente a un delta de 0.5, es decir, una opción ‘at the money’ tiene un valor intrínseco de cero, y todo su coste se debe a su probabilidad de ser valioso a vencimiento, es decir, a su volatilidad.

El tercer punto de interés es el mínimo para la curva de valor intrínseco. A partir de este punto, el valor intrínseco vuelve a subir, convergiendo asintóticamente a cero.

Este punto es el menor coste posible intrínseco y puede considerarse como un punto de equilibrio interesante entre el coste de la opción y las probabilidades de que termine con valor.

Calculando el mínimo del factor intrínseco, se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{c} S_{eq} \approx S + 0.75 \cdot \sigma \\ \Delta_{eq} \approx 0.22 \end{array}} \quad (7)$$

Es decir, este punto de equilibrio se encuentra aproximadamente a 0.75 veces la desviación típica, o lo que es lo mismo, a un delta de 0.22.

3. Esperanza matemática

Se analiza a continuación la esperanza matemática de la compra de un Call bajo la suposición de que el subyacente sigue una distribución normal.

A vencimiento

Este caso es el más sencillo, y de forma directa se obtiene que la esperanza matemática a vencimiento de la compra de un Call resulta:

$$EV = \sigma_r \cdot \phi(x_r) - \sigma_i \cdot \phi(x_i) + (S - K) \cdot (\Phi(x_r) - \Phi(x_i))$$

Dónde se ha utilizado el subíndice i para indicar la volatilidad implicada o esperada y el subíndice r para indicar la volatilidad real que finalmente resultó.

Si se calcula la esperanza matemática en vencimiento 'at the money' se obtiene:

$$\boxed{EV_{K=S} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot (\sigma_r - \sigma_i)} \qquad (8)$$

Este resultado es imprescindible para cualquier trader. La esperanza matemática de las opciones depende de la diferencia entra la volatilidad implicada y la volatilidad real. Si la volatilidad real fue mayor que la esperada, la esperanza matemática es positiva, de lo contrario es negativa.

Es imposible a largo plazo obtener beneficios de las opciones si no se tiene una opinión correcta sobre las volatilidades. La ecuación anterior ilustra claramente una regla que los traders de opciones conocen muy bien, **comprar volatilidad baja y vender volatilidad alta**.

Durante la vida de la opción

Este caso no resulta trivial ya que la integral de la distribución acumulada no puede ser expresada en 'funciones elementales'. De forma indirecta se puede encontrar la solución a este problema (cuyo desarrollo matemático excede la longitud pretendida del presente artículo):

$$\boxed{EV_{K=S} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\sqrt{\sigma_2{}^2 + \sigma_r{}^2} - \sigma_1\right)} \qquad (9)$$

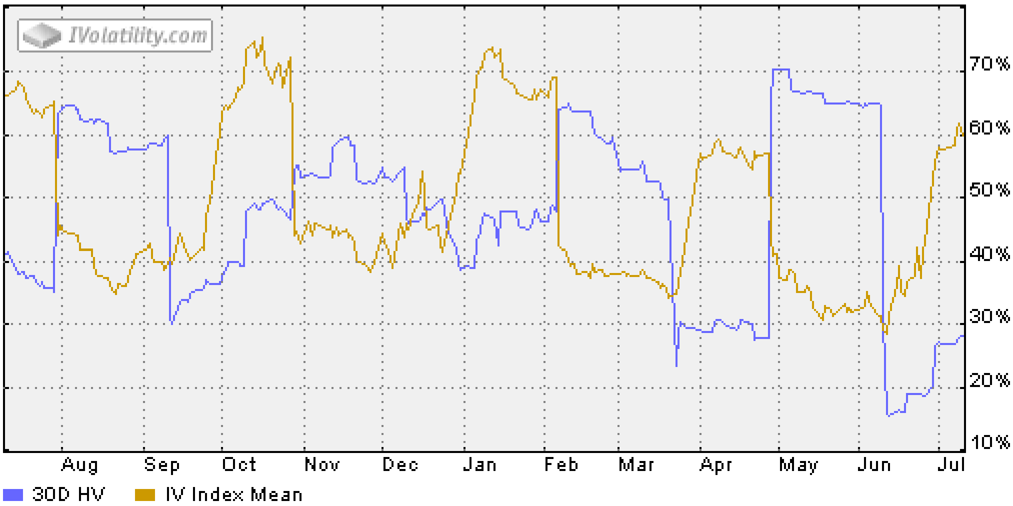
Dónde se ha utilizado el subíndice 1 para indicar la volatilidad implicada en el momento de la compra, el subíndice 2 para indicar la volatilidad implicada en un momento posterior y el subíndice r para indicar la volatilidad real que finalmente resultó en ese periodo.

Este resultado tiene múltiples usos. Se analiza a continuación un caso real, con fecha 10 de Julio del 2015, donde el subyacente (Twitter) tiene un evento importante (su anuncio de resultados trimestrales) el 28 de Julio. Se observa las volatilidades implicadas de las tres opciones más próximas 'at the money':

Fecha Vencimiento	Días hasta vencimiento	Volatilidad implicada
17-Julio	7	40.1%
21 Agosto	42	57.7%
18 Septiembre	70	51.5%

Este comportamiento es el típico en las volatilidades ante un gran evento, donde las opciones que expiran antes del evento no se ven afectadas y las opciones que expiran después del evento aumentan sus volatilidades, siendo mayor el aumento cuanto más próximo al mismo.

Por lo tanto, el comportamiento esperado es que a medida que se aproxima la fecha del evento, la volatilidad de Agosto aumentará significativamente y la de Septiembre aumentará moderadamente. Una vez pasado el evento, ambas volatilidades se desplomarán a un valor 'base' en las próximas horas o días. A continuación se muestra una gráfica histórica de Twitter[1] del último año, donde se observa claramente este comportamiento que se repite cada trimestre, donde la serie de color amarillo es la volatilidad implicada y la serie azul es la volatilidad histórica:



Usando el resultado de la esperanza matemática es posible responder a preguntas claves para cualquiera que quiera operar este patrón.

<u>¿Cuánto aumentará la volatilidad de Agosto justo antes del evento?</u>

Usando la ecuación (9) y suponiendo no arbitraje, se iguala la esperanza matemática a cero y se despeja V2, obteniendo:

$$V_2 = \sqrt{\frac{V_1^2 T_1 - V_r^2 (T_1 - T_2)}{T_2}}$$

Despejando valores, donde V_1=57.7%, V_r=40.1%, T_1=42 y T_2=18, se obtiene V_2=67.97%, lo que representa un aumento de más del 10% en 18 días.

<u>¿Cuánto se desplomará la volatilidad de Agosto justo después del evento?</u>

Si por ejemplo no estuviese disponible la opción de Julio, o estamos en un momento posterior al 17 de Julio, no se podría observar de forma directa la volatilidad base. Una opción es utilizar datos históricos para estimar el salto después del evento, pero suele ser mucho mejor enfoque utilizar las volatilidades implicadas que se observan en el mercado.

[1] Gráfica por cortesía de 'CBOE IVolatility Services'

Nuevamente, utilizando el resultado en (9), se obtiene:

$$V_r = \sqrt{\frac{V_1^2 T_1 - V_2^2 T_2}{T_1 - T_2}}$$

Este resultado es idéntico al usado por los traders para calcular de '*forward volatility*' usando el hecho de que la varianza (ponderada por el tiempo) es aditiva, lo que ratifica la validez del presente enfoque.

Despejando valores, donde V_1=57.7%, V_2=51.5%, T_1=42 y T_2=70, se obtiene V_r=40.46%.

Resumen

Se puede concluir que en 18 días la volatilidad implicada de Agosto subirá hasta un valor aproximado del 68%, para luego caer en apenas uno o dos días hasta un 40%.

Una estrategia que compre volatilidad ahora y la venda antes del evento se beneficiará de una subida de un 10%, mientras que una estrategia que venda volatilidad antes del evento y la compré después, se beneficiará de un salto del 28%. Estas dos estrategias tienen un perfil de riesgo completamente distinto y debe tenerse en cuenta a la hora de seleccionar la más adecuada.

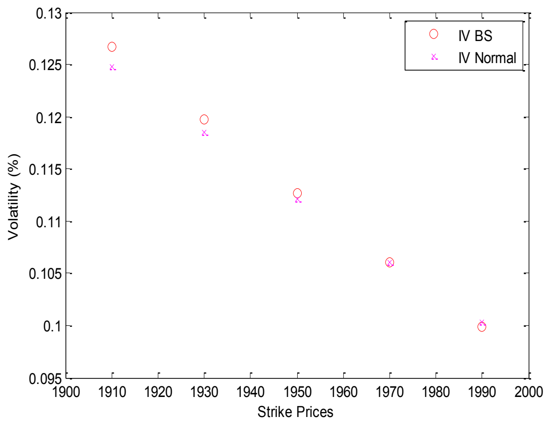
4. Skew

Este modelo normal frente al BS presenta pequeñas diferencias en valores muy 'out the money' o 'in the money'. Es interesante remarcar, que aunque las diferencias sean pequeñas, el modelo BS subvalora las opciones 'in the money' y sobrevalora las opciones 'out the money' con respecto al modelo neutro.

Este comportamiento puede explicar una parte del Skew que presentan gran parte de lo assets, como las acciones. Sin embargo, las diferencias no son tan grandes como para explicar completamente el Skew.

Lo que es incuestionable, es que el uso del modelo normal, **conduciría a un Skew menor**. Parte del Skew restante podría explicarse debido a que gran parte de las opciones se usan para '*hedge*', siendo la protección más demandada la compra de Puts.

La siguiente figura muestra el resultado de calcular las volatilidades implicadas según el precio de mercado de los call del ES-Sep19 a diferentes Strike Prices para el modelo BS y para el modelo normal, con S=1969, T=73 días y r=0:



5. Conclusiones

Se ha presentado una forma alternativa de valorar las opciones, suponiendo únicamente una distribución normal de los precios del subyacente. Este enfoque, a pesar de tener sus inconvenientes (como llegar a permitir precios negativos), representa un enfoque más natural y neutro del comportamiento del mercado en muchas situaciones.

Las ecuaciones que se obtienen son más sencillas y mucho más interpretables que las derivadas de BS. Todas las interpretaciones y conclusiones que se han presentado son igual de válidas para el modelo BS; por lo que como mínimo tienen un gran valor pedagógico.

Así mismo, en muchas condiciones, ambos modelos son similares, pudiendo aplicar cualquier conjunto de ecuaciones con diferencias muy poco significativas.

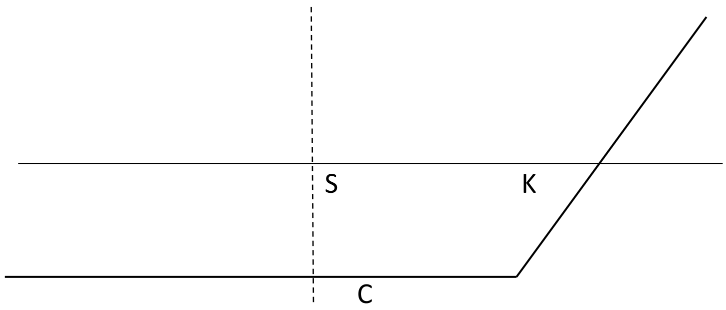
Se ha derivado la fórmula de esperanza matemática bajo este enfoque y se ha utilizado para estimar saltos en las volatilidades ante eventos del subyacente, obteniendo un resultado muy valioso para operar este tipo de patrones.

Se ha comprobado que el uso de este modelo normal conllevaría a una pequeña reducción del Skew que presentan la mayoría de Assets, sin embargo, con tiempos largos hasta vencimiento y volatilidades altas es donde se producen las mayores diferencias de los dos enfoques.

6. Anexo

Para obtener el valor de una opción de estilo europeo bajo el supuesto de que los precios del subyacente siguen una distribución normal, se utiliza el argumento de no arbitraje, es decir, que la esperanza matemática al vencimiento sea cero.

El valor de un Call a vencimiento se muestra en la siguiente figura:



Que es equivalente a descomponer el valor en una constante y una recta para x>K. La esperanza matemática de una constante bajo cualquier distribución sigue siendo la misma constante, por lo que sólo hay que obtener la esperanza matemática de la recta para x>K para obtener el valor del Call.

$$EV = \int_{x=K}^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-S}{\sigma}\right)^2} \cdot (x-K)dx$$

Aplicando el siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{x-S}{\sigma}, dx = \sigma dy, x = y \cdot \sigma + S$$

Se obtiene:

$$EV = \int_{y=\frac{K-S}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sigma} (\phi(y) \cdot y \cdot \sigma + \phi(y) \cdot (S-K)) \cdot \sigma\, dy$$

Siendo $\phi(y)$ la distribución normal estándar. Integrando se obtiene:

$$EV = -\phi(y) \cdot \sigma]_{\frac{K-S}{\sigma}}^{\infty} + \Phi(y) \cdot (S-K)]_{\frac{K-S}{\sigma}}^{\infty}$$

Siendo $\Phi(y)$ la distribución acumulada normal estándar. Finalmente, utilizando las propiedades de la distribución estándar se obtiene:

$$EV = \phi\left(\frac{S-K}{\sigma}\right) \cdot \sigma + \Phi\left(\frac{S-K}{\sigma}\right) \cdot (S-K)$$

TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

Polígono Industrial Urtinsa, Edificio "Antares"
C/ Las Fábricas 8, Oficina 1-07
28923 Alcorcón (Madrid).
Tlf. +34 911 836 240
Fax. +34 910 808 052
www.qwi.es